Introducción a los sistemas dinámicos

Aplicaciones matemáticas para economía y negocios (EAF2010)

Felipe Del Canto

Pontificia Universidad Católica de Chile

Primer semestre de 2021

Motivación: El retiro del 10%

Motivación: El retiro del $10\,\%$

- Una persona tiene $\$1$ millón en su AFP.

- Todos los años, la inversión entrega un $5\,\%$ de interés.
  - Eso significa que al año siguiente la persona tendrá $\$1{,}05$ millones.
  - Que se calcula $\$1 \times (1 + 0{,}05)$.

- Pero además, una vez a fin de año se puede sacar el $10\,\%$ del fondo.
  - Si así sucediera, entonces la persona se quedaría con $\$94{,}5$ millones.
  - Que se calcula $\$1{,}05 \times (1 - 0{,}1)$.

Motivación: El retiro del 10 %

- Nos gustaría modelar esta situación.
- Después de t años, sin ningún retiro, el monto total ahorrado es $\$1 \times (1{,}05)^t$.
- ¿Pero y si se retira todos los años?
  - El monto total ahorrado después de t años es $\$1 \times (1{,}05 \times 0{,}9)^t = \$1 \times (0{,}945)^t$.
  - ¿Qué pasa en el largo plazo, cuando $t \to \infty$?

Motivación: El retiro del 10 %

- Este tipo de problemas es muy común en aplicaciones.
- Hay una o varias variables que evolucionan.
  - Y esa evolución ocurre a lo largo del “tiempo”.
  - Pero ojo, no siempre tenemos que pensar que la evolución es en el tiempo.
  - Esta PPT evoluciona cuando yo apreto un botón.
- Por simplicidad, pensaremos que la evolución es siempre en el tiempo.

Introducción

Definición (Sistema dinámico)

Un sistema dinámico es una variable o un grupo de variables que evolucionan en el tiempo t de acuerdo a una función $f : D \to \mathbb{R}^n$. Esto es, si las variables son $\mathbf{v} = (x, y, z, \dots) \in \mathbb{R}^n$ entonces

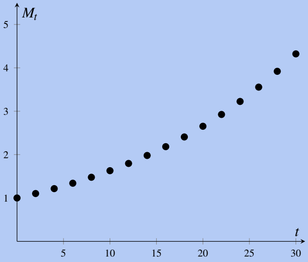
$$\mathbf{v}(t) = (x(t), y(t), z(t), \dots) = f(t)$$

indicando que para el tiempo t, las variables toman el valor $\mathbf{v}(t)$, que se obtiene a partir de la función f.

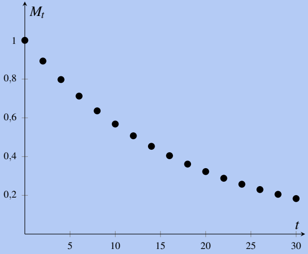
- Dependiendo del conjunto D reconocemos dos tipos de sistemas dinámicos:
  1. En tiempo discreto.
  2. En tiempo continuo.

Ejemplo (Sistema dinámico en tiempo discreto)

El modelo de la motivación es un ejemplo de sistema dinámico en tiempo discreto. Como t es la cantidad de años que han pasado, $D = \mathbb{N}_0$. Así, dependiendo si se retiraba todos los años o no podemos ver la evolución del monto M_t del fondo de la AFP en un gráfico.



(a) Sin retiro



(b) Con retiro

Ejemplo (Sistema dinámico en tiempo continuo)

Cuando vemos un video, cada pixel de la pantalla evoluciona en el tiempo. Si el video dura 30 segundos, entonces tomando $D = [0,30]$ tenemos que en cada tiempo t, el pixel $\mathbf{P}(t) = (R(t), G(t), B(t))$ evoluciona en el tiempo.

Notar que si hilamos más fino, uno podría pensar que el video funciona en tiempo discreto. Esto, porque un video no es más que una secuencia de varias fotos. Sin embargo, si el video corre a 60 FPS (60 fotos por cada segundo), entonces cada foto avanza cada $\frac{1}{60} \approx 0{,}017$ segundos. En ese sentido parece razonable pensar que el pixel es un sistema dinámico en tiempo continuo.

En resumen

- Los sistemas dinámicos son variables en evolución.
- La evolución puede ocurrir de manera discreta o continua.
- Ahora, veremos las preguntas que nos interesan en este curso.

Ecuaciones en diferencias y diferenciales

Ecuaciones en diferencias y diferenciales

- Nuestro principal objetivo será describir sistemas dinámicos.

- A partir de su evolución y algún punto de partida.

- Revivamos el ejemplo de la motivación para entender esta idea.

Ejemplo (El retiro del 10 % v2.0)

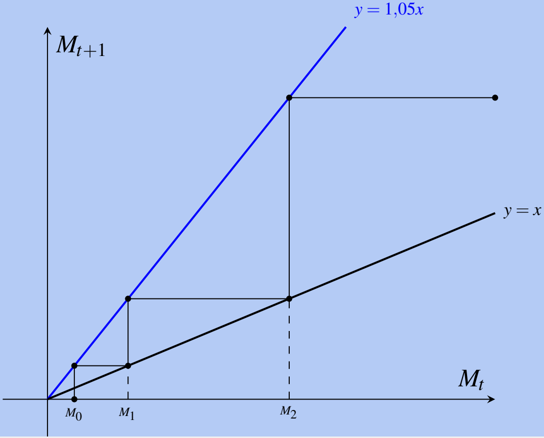
En el ejemplo de la AFP, dijimos que cuando no había retiro, el monto M_t en la AFP seguía la siguiente evolución $M_t = (1{,}05)^t$. Observemos que esto se puede escribir como

$$M_{t+1} = 1{,}05 M_t$$

Es decir, el valor de la variable en el tiempo $t+1$ depende de su valor en el tiempo t, pero además esa relación no cambia con t.

Lo interesante es que podemos estudiar estos sistemas dinámicos gráficamente.

Ejemplo (El retiro del 10 % v2.0)



Ejemplo (El retiro del 10 % v2.0)

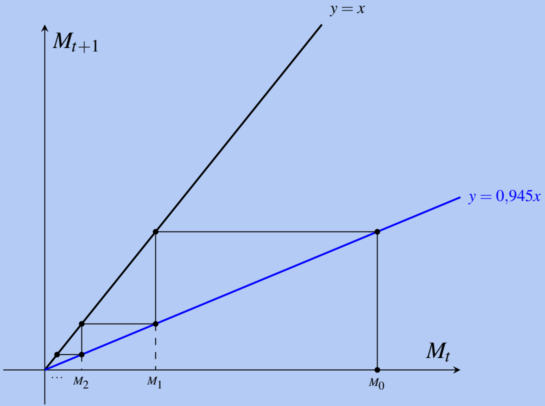
Con este gráfico parece claro que el sistema dinámico evoluciona creciendo infinitamente. ¿Cómo se compara este caso con el sistema con retiro?

En ese caso el sistema evolucionaba como $M_t = (0{,}945)^t$, lo que se puede escribir como

$$M_{t+1} = 0{,}945 M_t$$

y que podemos revisar graficamente.

Ejemplo (El retiro del 10 % v2.0)



Con este gráfico parece claro que el sistema dinámico evoluciona de manera que $M_t \xrightarrow{t} 0$.

Ecuaciones en diferencias y diferenciales

- En el ejemplo podíamos describir el sistema dinámico usando una ecuación.
  - $M_{t+1} = f(M_t)$.
- Ese tipo de ecuaciones se conoce como **ecuación en diferencias**.
  - O también llamado **relación de recursión** o **recurrencia**.
- En tiempo continuo el análogo se conoce como **ecuación diferencial**.

Definición (Ecuación en diferencias)

Sea $f(t, x_{t+k-1}, x_{t+k-2}, \ldots, x_t)$, con $k \in \mathbb{N}$, una función definida para $t \in \mathbb{N}_0$ y $t \geq t_0$. Una ecuación en diferencias es la relación

$$x_{t+k} = f(t, x_{t+k-1}, x_{t+k-2}, \ldots, x_t)$$

Y decimos que la ecuación en diferencias tiene orden k.

Una solución a la ecuación en diferencias es un sistema dinámico x_t que la verifica para todo $t \geq t_0$.

- En el ejemplo anterior, la ecuación era de orden 1 y $f(t, M_t) = 1{,}05 M_t$.

- En principio podríamos tener un “problema”.
- Dada una ecuación en diferencias/diferencial, no siempre hay solución única.
- Incluso, puede haber otro problema: no existe una solución.
- Contestaremos a continuación cuándo ambas cosas ocurren.

Teorema de existencia y unicidad

- Supongamos que tenemos una ecuación en diferencias (de orden 2)

$$x_{t+2} = f(t, x_{t+1}, x_t)$$

- ¿Existe un sistema dinámico que la satisface?
  - Sí, basta con tener x_0 y x_1, y calcular recursivamente.
- ¿Existe un **único** sistema dinámico que la satisface?
  - No, si cambiamos x_0 y x_1 podemos obtener soluciones diferentes.

Teorema (Existencia y unicidad en tiempo discreto)

Considere el problema de encontrar una solución a la siguiente ecuación en diferencias de orden k

$$x_{t+k} = f(t, x_{t+k-1}, \ldots, x_t)$$

que además verifique $x_0 = c_0, x_1 = c_1, \ldots, x_{k-1} = c_{k-1}$. Este problema tiene una única solución.

- Por la discusión anterior este teorema es "obvio".
  - La solución existe porque con f se pueden computar todos los valores de x_t.
  - La solución es única porque los primeros k valores de x_t están fijados.